Développements asymptotiques de fonctions arithmétiques

Théorème 1. *Notons $\sigma : n \in \mathbb{N} \longmapsto \sum_{d|n} d$ la fonction somme des diviseurs. Alors,*

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12}x^2 + \underset{x\to+\infty}{O}\left(x\ln(x)\right).$$

Démonstration. *Soit $x \geq 1$. Alors,*

$$\sum_{n\leq x}\sigma(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} d = \sum_{\substack{m,r\in\mathbb{N}^* \\ mr\leq x}} r = \sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{x}{m}\rfloor} r = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor\left(1+\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor\right).$$

Pour $m \in \mathbb{N}^*$, notons $\varepsilon_m(x) = \frac{x}{m} - \left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor \in [0,1]$. Alors,

$$\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor = x\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\varepsilon_m(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\left(x\ln(x)\right).$$

Et,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor^2 &= x^2\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{1}{m^2} - 2x\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{\varepsilon_m(x)}{m} + \sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\varepsilon_m(x)^2 \\ &= x^2\left(\frac{\pi^2}{6} - \underset{x\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \underset{x\to+\infty}{O}\left(x\ln(x)\right) \\ &= \frac{\pi^2x^2}{6} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(x\ln(x)\right).\end{aligned}$$

On conclut en mettant tout bout à bout.

Théorème 2. *Notons φ l'indicatrice d'Euler. Alors,*

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + \underset{x\to+\infty}{O}\left(x\ln(x)\right).$$

Démonstration. *Soit $n \geq 1$, on sait alors que $n = \sum_{d|n}\varphi(d)$.*

La formule d'inversion de Möbius permet d'obtenir, $\varphi(n) = \sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right)$.

On effectue les mêmes étapes que précédemment, pour $x \geq 1$,

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n) = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{\substack{m,r\in\mathbb{N}^* \\ mr\leq x}} r\mu(m).$$

Donc,

$$\sum_{n\leq x}\varphi(n) = \sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\sum_{r=1}^{\lfloor \frac{x}{m}\rfloor} r\mu(m) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(m)\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor\left(1+\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor\right).$$

Les estimations sont presque les mêmes que les précédentes, car $|\mu| \leq 1$.

$$\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(m)\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor = x\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{\mu(m)}{m} - \sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(m)\varepsilon_m(x) = \underset{x\to+\infty}{O}\left(x\ln(x)\right).$$

Puis,

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(m)\left\lfloor\frac{x}{m}\right\rfloor^2 &= x^2\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{\mu(m)}{m^2} - 2x\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{\mu(m)}{m}\varepsilon_m(x) + \sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\mu(m)\varepsilon_m(x)^2. \\ &= x^2\sum_{m=1}^{\lfloor x\rfloor}\frac{\mu(m)}{m^2} + \underset{x\to+\infty}{O}\left(x\ln(x)\right).\end{aligned}$$

Or, on sait que,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}.$$

Donc,

$$\sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\mu(m)}{m^2} = \frac{6}{\pi^2} - \sum_{m > \lfloor x \rfloor} \frac{\mu(m)}{m^2} = \frac{6}{\pi^2} + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right).$$

On conclut en mettant tout bout à bout.

Théorème 3. *Notons* $\tau : n \longmapsto \sum_{d|n} 1$*, la fonction nombre de diviseurs. Alors,*

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x\ln(x) + (2\gamma - 1)x + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\sqrt{x}\right).$$

Démonstration. *Soit* $x \geq 1$*. Alors,*

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{\substack{m,r \in \mathbb{N}^* \\ mr \leq x}} 1 = \sum_{\substack{mr \leq x \\ m \leq \sqrt{x}}} 1 + \sum_{\substack{mr \leq x \\ r \leq \sqrt{x}}} 1 - \sum_{\substack{mr \leq x \\ m,r \leq \sqrt{x}}} 1.$$

D'où,

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = 2 \sum_{\substack{mr \leq x \\ m \leq \sqrt{x}}} 1 - \sum_{m,r \leq \sqrt{x}} 1 = 2 \sum_{m=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor^2.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \left\lfloor \frac{x}{m} \right\rfloor &= x \sum_{m=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \frac{1}{m} - \sum_{m=1}^{\lfloor \sqrt{x} \rfloor} \varepsilon_m(x) \\
&= x\left(\ln(\sqrt{x}) + \gamma + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\sqrt{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}x\ln(x) + \gamma x + \frac{\sqrt{x}}{2} + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\sqrt{x}\right).
\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \tau(n) &= x\ln(x) + 2\gamma x - \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor^2 + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\sqrt{x}\right) \\
&= x\ln(x) + 2\gamma x - \left(x + \underset{x \to +\infty}{O}(1)\right) + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\sqrt{x}\right) \\
&= x\ln(x) + (2\gamma - 1)x + \underset{x \to +\infty}{O}\left(\sqrt{x}\right).
\end{aligned}$$

Remarques, références.

Développement rigolo, qui utilise beaucoup de petits résultats intermédiaires et pas très compliqués à démontrer. On peut aller BEAUCOUP plus vite mais pour retranscrire les différentes simplifications et pour bien comprendre ce que l'on fait j'ai préféré détailler certaines étapes qui pourraient se faire de tête au tableau. Il faut tout de même être à l'aise avec les o et les O. Concrètement, on utilise que $\lfloor x \rfloor = x + \underset{x \to +\infty}{O}(1)$ à chaque fois. On peut sûrement aussi invoquer les théorèmes de sommation pour les relations de comparaison mais j'ai préféré le rédiger ainsi. Je n'aurais sûrement pas présenté les 3, c'est peut-être long selon ce que l'on décide de détailler parmi ce que je n'ai pas détaillé ici. Par exemple, on utilise deux fois le fait que $\sum_{m=1}^{\lfloor x \rfloor} \frac{1}{m^2} = \underset{x \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{x}\right)$. Cela peut se faire avec une comparaison série-intégrale bidon mais il faut avoir en tête que ce résultat est important, $\underset{x \to +\infty}{o}(1)$ n'aurait pas suffi pour obtenir les développements souhaités. On utilise aussi la formule d'inversion de Möbius et les deux relations suivantes, $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$ et $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\mu(m)}{m^2} = \frac{1}{\zeta(2)}$.
Aussi, on peut détailler la deuxième égalité de la démonstration du théorème 1, si elle ne paraît pas très claire.

Notons $A_x = \{n, d \in \mathbb{N}^* : n \leq x,\ d|n\}$ et $B_x = \{m, r \in \mathbb{N}^* : mr \leq x\}$,
alors l'application $\alpha_x : (n, d) \in A_x \longmapsto (n/d, d) \in B_x$ est bijective.
Alors, en notant $f : (n, d) \in A_x \longmapsto d$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \sigma(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d \\
&= \sum_{(n,d) \in A_x} f(n, d) \\
&= \sum_{(m,r) \in B_x} f(\alpha_x^{-1}(m, r)) \\
&= \sum_{(m,r) \in B_x} f((mr, r)) \\
&= \sum_{\substack{m,r \in \mathbb{N}^* \\ mr \leq x}} r.
\end{aligned}$$

Pour les références, les énoncés sont dans le Tenenbaum
"Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres"
mais les preuves sont elliptiques alors j'ai utilisé ce qui était déjà
posté ici et je l'ai écris à ma manière.. Le théorème 3 se trouve
également dans le Gourdon d'analyse.